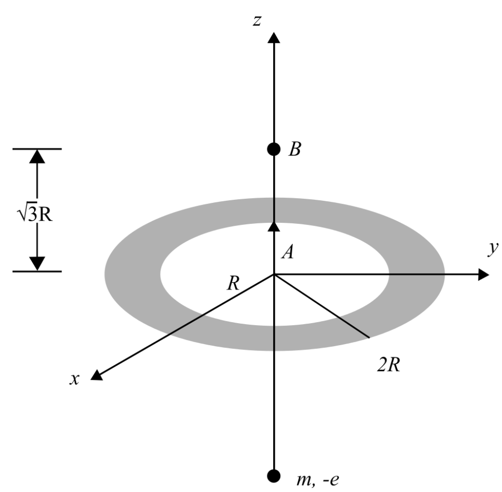
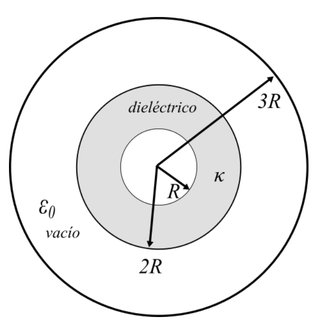
Universidad Simón Bolívar
Departamento de Física

Física II (FS-2211)
2^{do} Examen Parcial (30 %)
Sep-Dic 2016

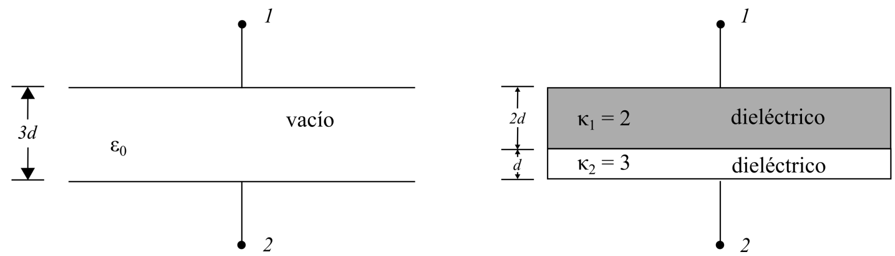
1. (10 pts.) Una corona circular no conductora de radios R y $2R$ tiene una carga total Q distribuida uniformemente sobre su superficie. Un electrón de carga $-e$ y masa m se aproxima moviéndose a lo largo del eje de la corona y pasa por el centro de la corona (Punto A) con una rapidez desconocida V_a. Si el electrón alcanza su máxima posición (Punto B) a una distancia $\sqrt{3}R$ del origen y se devuelve. Calcule:
   (a) (1 pto.) La densidad superficial de carga de la corona circular.
   (b) (3 pts.) El potencial eléctrico para cualquier punto arbitrario $P(0, 0, z)$ sobre el eje z.
   (c) (2 pts.) A partir del potencia eléctrico $V = V(z)$ calculado en la parte (b), obtenga el vector campo eléctrico para cualquier punto $P(0, 0, z)$ ubicado sobre el eje z.
   (d) (4 pts.) El vector velocidad del electrón cuando pasa por el centro de la corona.



2. (12 pts.) Un condensador esférico está formado por dos cascarones esféricos concéntricos, el interior de radio R y el exterior de radio $3R$. En el espacio entre los cascarones se encuentra un material aislante de constante dieléctrica uniforme κ que ocupa la región comprendida entre los radios R y $2R$, mientras que en la región comprendida entre los radios $2R$ y $3R$ está vacía. Conociendo que el cascarón interior tiene una carga $-Q$ y el cascarón exterior tiene una carga positiva $+Q$. Calcule:
   (a) (4 pts.) El campo eléctrico de todos los puntos interiores del condensador.
   (b) (3 pts.) La densidad superficial de carga inducida que aparece en las superficies interior, $\sigma_R(r = R)$ y exterior, $\sigma_{2R}(r = 2R)$.
   (c) (3 pts.) La diferencia de potencial entre los cascarones esféricos.
   (d) (2 pts.) La energía potencial eléctrica almacenada en el condensador



3. (8 pts.) Un condensador plano, en el vacío, tiene una distancia de separación entre sus placas de $3d$. Una batería que suministra una diferencia de potencial V que carga las placas de este condensador y a continuación se le desconecta del condensador. A continuación, el espacio entre las placas del condensador, se rellena con dos capas de dieléctricos: La primera capa tiene un espesor $2d$ y su constante dieléctrica es $\kappa_1 = 2$; mientras que la segunda capa de espesor d tiene una constante dieléctrica $\kappa_2 = 3$. Sea V' la nueva diferencia de potencial entre las placas del condensador, calcule la relación $\dfrac{V}{V'}$



Soluciones

Pregunta 1

(a) $\sigma = \dfrac{Q}{A} = \dfrac{Q}{\pi\left[(2R)^2 - R^2\right]} = \dfrac{Q}{3\pi R^2}$

(b) Como la distribución de carga es localizada y finita, se puede fijar $V(\infty) = 0$ y es válido

$$V(\vec{r}) = \int \frac{k\, dQ}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Escogiendo coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} dQ &= \sigma ds \\ \vec{r} &= z\hat{k} \\ \vec{r'} &= r\hat{u}_r \end{aligned} \qquad\qquad ds = r\, d\theta\, dr$$

se tiene

$$\begin{aligned} V(z) &= \int_0^{2\pi}\int_R^{2R} \frac{k\left[\sigma(r\, d\theta\, dr)\right]}{(z^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} = k\sigma \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{2R} \frac{r\, dr}{(z^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} = k\sigma(2\pi)\left[\frac{1}{2}\left[z(z^2+r^2)^{\frac{1}{2}}\right]_R^{2R}\right] \\ &= 2\pi k\sigma\left[(z^2+4R^2)^{\frac{1}{2}} - (z^2+R^2)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{2}{3}k\frac{Q}{R^2}\left[(z^2+4R^2)^{\frac{1}{2}} - (z^2+R^2)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &= \frac{Q}{6\pi\varepsilon_0 R^2}\left[(z^2+4R^2)^{\frac{1}{2}} - (z^2+R^2)^{\frac{1}{2}}\right] \end{aligned}$$

Método alternativo: usar superposición del potencial de dos discos, uno de densidad σ y radio $2R$ y el otro de densidad $-\sigma$ y radio R, concéntricos.

(c) Dado el potencial $V(z)$ de la corona,

$$\begin{aligned} \vec{E}(z) &= -\frac{dV}{dz}(z)\hat{k} = -\frac{d}{dz}\left[\frac{2}{3}k\frac{Q}{R^2}\left[(z^2+4R^2)^{\frac{1}{2}} - (z^2+R^2)^{\frac{1}{2}}\right]\right]\hat{k} \\ &= \frac{2}{3}k\frac{Q}{R^2}\left[\frac{z}{(z^2+R^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{z}{(z^2+4R^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\hat{k} = \frac{Q}{6\pi\varepsilon_0 R^2}\left[\frac{z}{(z^2+R^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{z}{(z^2+4R^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\hat{k} \end{aligned}$$

(d) La fuerza electróstatica es conservativa, por ende,

$$\begin{aligned}
\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta K &= -\Delta U;\; U(z) = e^{-}V(z) \\
\Rightarrow \cancelto{0}{K_B} - K_A &= -(U_B - U_A) \\
\Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 &= e^{-}(V(\sqrt{3}R) - V(0)) \\
&= e^{-}\left[\frac{2}{3}k\frac{Q}{R^2}\left[(\sqrt{7R^2} - \sqrt{4R^2}) - (\sqrt{4R^2} - \sqrt{R^2})\right]\right) \\
&= \frac{2}{3}k(\sqrt{7} - 3)\frac{e^{-}Q}{R} \\
\Rightarrow \vec{V}_A &= \sqrt{\frac{4}{3}k(3 - \sqrt{7})\frac{|e^{-}|Q}{mR}}\hat{k} \text{ , cuando } e^{-} \text{ sube} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3\pi\varepsilon_0}(3 - \sqrt{7})\frac{|e^{-}|Q}{mR}}\hat{k}
\end{aligned}$$

Pregunta 2
(a) La Ley de Gauss nos dice

$$\Phi_S^E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{libre}}}{\varepsilon} \;\; ; \;\; \varepsilon = K\varepsilon_0$$

Tomando una superficie esférica de radio r concéntrica con el condensador, se tiene

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi K\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{u}_r & , R < r \leq 2R \\ -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{u}_r & , 2R < r < 3R \end{cases}$$

$$\hat{u}_r = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k}$$

- Método alternativo: El campo eléctrico en presencia de un dieléctrico con constante K coincide con el campo eléctrico que una carga produce en el vacío divido entre K.
En el vacío

$$\vec{E}_o(\vec{r}) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{u}_r$$

Por ende, en presencia del dieléctrico

$$\vec{E}_o(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi k\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{u}_r$$

y el resultado es el mismo que el descrito anteriormente
(b) Dada la distribución de carga del capacitor, $\sigma_R > 0$ y $\sigma_{2R} < 0$. No obstante, estas densidades deben ser tales que garanticen que el dieléctrico tenga carga neta nula. Esto es

$$\begin{aligned}
Q_R + Q_{2R} = 0 \Rightarrow \sigma_R S_R + \sigma_{2R}S_{2R} = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_{2R} = -\left(\frac{S_R}{S_{2R}}\right)\sigma_R \\
\Rightarrow \sigma_{2R} = -\left(\frac{4\pi R^2}{4\pi(2R)^2}\right)\sigma_R = -\frac{1}{4}\sigma_R
\end{aligned}$$

Entonces, es necesario hallar únicamente σ_R. La Ley de Gauss en las cercanías de $r = R$ arrojan.

$$\begin{aligned}
\sigma_R = -\left(1 - \frac{1}{K}\right)\sigma_{-} = -\left(1 - \frac{1}{K}\right)\left(\frac{-Q}{4\pi R^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{K}\right)\frac{Q}{4\pi R^2} \\
\Rightarrow \sigma_{2R} = -\left(1 - \frac{1}{K}\right)\frac{Q}{16\pi R^2}
\end{aligned}$$

(c) La relación entre $\vec{E}(\vec{r})$ y $V(\vec{r})$ nos dice

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{dV(\vec{r})}{dr}\hat{u}_r \Rightarrow \Delta V(\vec{r}) = -\int \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Entonces

$$\Delta V = V(3R) - V(R) = -\int_R^{3R} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\left[\int_R^{2R} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{2R}^{3R} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}\right] \; ; \; d\vec{r} = dr\,\hat{u}_r$$
$$= \left[\int_R^{2R} \frac{Q}{K(4\pi\varepsilon_0)}\frac{1}{r^2}d\vec{r} + \int_{2R}^{3R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}d\vec{r}\right] = \frac{Q}{K(4\pi\varepsilon_0)}\left[\frac{1}{K}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) + \left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R}\right)\right]$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{K}\left(\frac{1}{2R}\right) + \frac{1}{6R}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2K}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{K+3}{6K}\right] > 0$$

- Método alternativo:
También es posible calcular la diferencia de potencial a través de capacitancia de condensador. Dado que la carga en este no cambia.

$$Q = c\Delta V \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{C}$$

Siendo C la capacitancia de dos capacitores esféricos conectados en serie, uno con un dieléctrico K de dimensiones R y $2R$ y el otro con dimensiones $2R$ y $3R$. Entonces,

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_K} + \frac{1}{c_0}$$

La capacitancia de un condensador esférico de radios a y b ($a < b$) es

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Por ende,

$$\frac{1}{c} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right)\right] + \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R}\right)\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{K}\left(\frac{1}{2R}\right) + \frac{1}{6R}\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon R}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2K}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon R}\left[\frac{K+3}{6K}\right]$$

Entonces,

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2K}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R}\left[\frac{K+3}{6K}\right]$$

(d) La energía almacenada en el campo eléctrico es de la forma

$$U = \int u_E \, dV, \text{ donde } u_E \text{ es la densidad volumétrica de energía.}$$

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

Entonces,

$$U = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=R}^{3R} \left[\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right] r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta d\theta \left[\int_R^{2R} (K\varepsilon_0)\frac{1}{2}\Big(-\frac{Q}{4\pi K\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\Big)^2 r^2 dr + \int_{2R}^{3R} \varepsilon_0 \frac{1}{2}\Big(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\Big)^2 r^2 dr\right]$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi)(2)\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right]^2 \varepsilon_0 \left[K^{-1}\int_R^{2R} \frac{1}{r^2}dr + \int_{2R}^{3R} \frac{1}{r^2}dr\right]$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{K}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{2R}\right) + \left(\frac{1}{2R}-\frac{1}{3R}\right)\right] = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{2K}\right] = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{K+3}{6K}\right]$$

- Método alternativo

La energía almacenada en un capacitor de carga Q, capacitancia C y diferencia de potencial ΔV es

$$U = \frac{1}{2}c(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{c} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{2K}\right] = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{K+3}{6K}\right]$$

Pregunta 3

El condensador vacío se carga con una diferencia de potencial V. Como este se desconecta previo a ser rellenado con los dieléctricos, la carga del condensador no cambia. Sin embargo, el cambio en la capacitancia producirá una variación en el potencial entre las placas del condensador, siendo esta denotada con V'. Entonces, se tiene:

$$Q = CV \;\text{ y }\; Q' = C'V' \text{ , pero } Q' = Q \text{ , por consiguiente,}$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{C}{C'}$$

Para capacitores de placas paralelas con área A y separación x, se tiene una capacitancia

$$\mathbb{C} = \frac{\varepsilon A}{x} \; ; \varepsilon = K\varepsilon_0$$

Inicialmente

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{3d}$$

La distribución final puede pensarse como dos condensadores con la misma área conectados en serie; el primero con dieléctrico K, y separacion $2d$ y el segundo con dieléctrico K_2 y separación d. Por ende

$$\frac{1}{c'} = \frac{1}{c'_1} + \frac{1}{c'_2} = \frac{2d}{K_1\varepsilon_0 A} + \frac{d}{K_2\varepsilon_0 A}$$

Entonces,

$$\frac{V'}{V} = \frac{C}{C'} = \frac{\frac{\varepsilon_0 A}{3d}}{\frac{2d}{K_1\varepsilon_0 A} + \frac{d}{K_2\varepsilon_0 A}} = \frac{\varepsilon_0 A}{3d}\left[\frac{2d}{K_1\varepsilon_0 A} + \frac{d}{K_2\varepsilon_0 A}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{K_1+2K_2}{K_1K_2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{2+2(3)}{2\cdot 3}\right] = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{V}{V'} = \frac{9}{4}$$

- Método alternativo

El campo eléctrico es un condensador de placas paralelas es uniforme

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Por ende, la diferencia de potencial en un condensador con separación x es

$$V = \frac{\sigma}{\varepsilon} x$$

Entonces:

$$V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(3d)$$
$$V' = \frac{\sigma}{K_1\varepsilon_0}(2d) + \frac{\sigma}{K_2\varepsilon_0}(d)$$

$$\Rightarrow \frac{V}{V'} = \frac{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(3d)}{\frac{\sigma}{K_1\varepsilon_0}(2d) + \frac{\sigma}{K_2\varepsilon_0}(d)} = \frac{3}{\frac{2}{K_1} + \frac{1}{K_2}}$$
$$= 3\left[\frac{K_1K_2}{K_1+2K_2}\right] = 3\left[\frac{2\cdot 3}{2+2(3)}\right] = \frac{4}{9}$$

Este parcial fue creado y resuelto por el Prof. Kevin Ng y digitalizado por Jean F.Gómez para Guías USB

Jean Franco Gómez

15-10581

Ingeniería de la Computación

Twitter: @JeanFranGo